ملاحظة :

كل جبر لي فوق حقل بعده 2 قابل للحل $\{e_1,e_2\}\subset A$ — $\{e_1,e_2\}\in A$

$[e_1,e_2]=c_1e$

$0\neq c_1\in F$

الحالة الثانية :

إذا كان $[e_1,e_2]=c_1e_1+c_2e_2$ حيث $c_1,c_2\in F$ معاملات الضرب

نأخذ العنصرين $e_1',e_2'\in A$ حيث

$$e_1'=c_1e_1+c_2e_2$$
$$e_2'=c_1e_1-c_2e_2$$

نبرهن أن المجموعة $\{e_1',e_2'\}$ مستقلة خطياً فوق F

ليكن $\mu,\lambda\in F$ بحيث

$$\lambda e_1'+\mu e_2'=0$$
$$\lambda c_1e_1+\lambda c_2e_2+\mu c_1e_1-\mu c_2e_2=0$$
$$(\lambda c_1+\mu c_1)e_1+(\lambda c_2-\mu c_2)e_2=0$$

بما أن $\{e_1,e_2\}$ قاعدة نجد أن

$$\lambda c_1+\mu c_1=0\Rightarrow(\lambda+\mu)c_1=0\Rightarrow\lambda+\mu=0$$
$$\lambda c_2-\mu c_2=0\Rightarrow(\lambda-\mu)c_2=0\Rightarrow\lambda-\mu=0$$
$$\Rightarrow 2\lambda=0$$
$$\Rightarrow\lambda=0\Rightarrow\mu=0$$

وهذا يبين أن المجموعة $\{e_1',e_2'\}$ مستقلة خطياً فوق F، وبالتالي فهي تشكل قاعدة لـ A فوق F

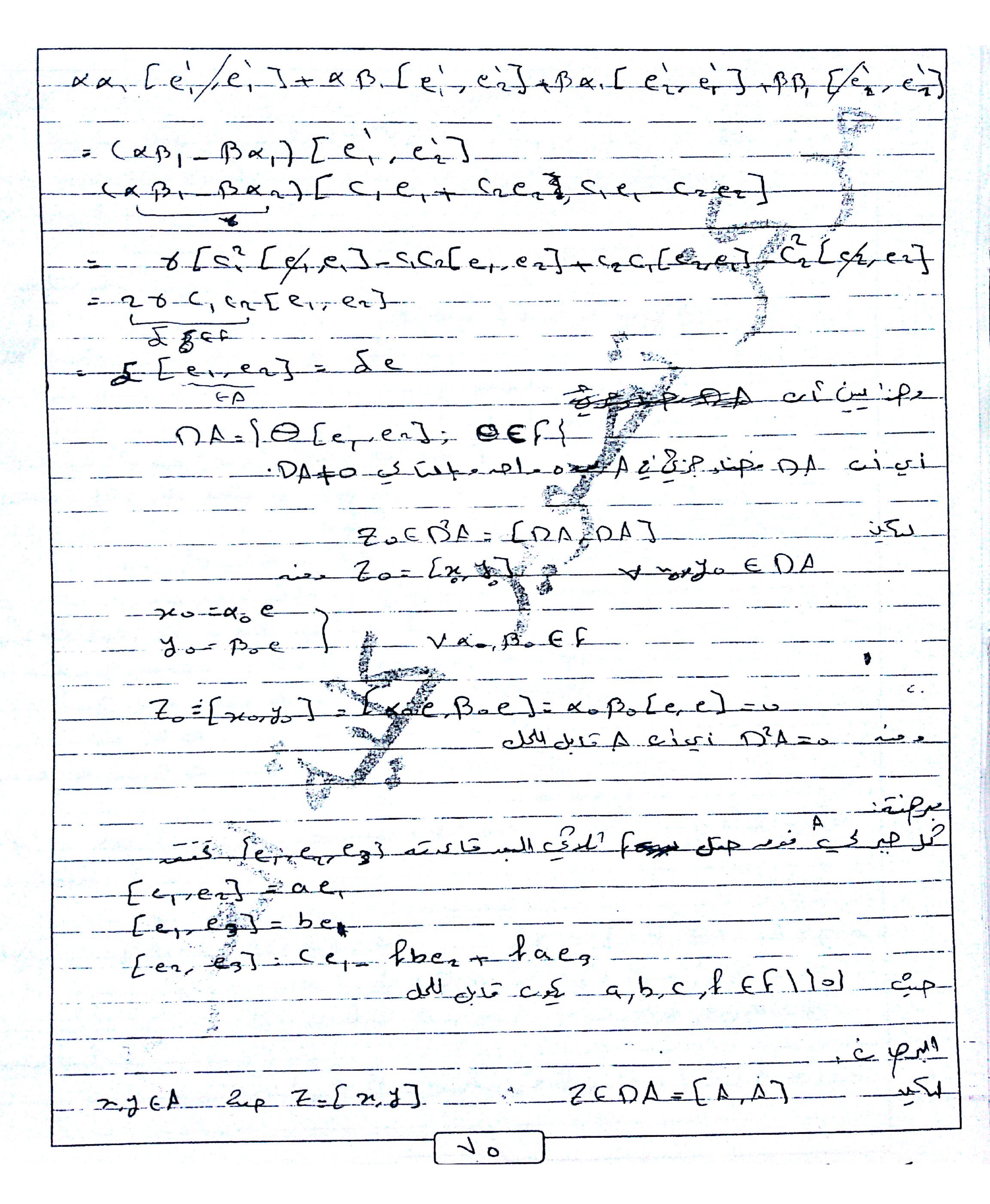
ليكن $Z\in DA=[A,A]$ عندئذ $Z=[x,y]$ حيث $x,y\in A$

$x=\alpha e_1'+\beta e_2'$ $\alpha,\beta\in F$

$y=\alpha_1e_1'+\beta_1e_2'$ $\alpha_1,\beta_1\in F$

ومنه نجد أن

$$Z=[x,y]=[\alpha e_1'+\beta e_2',\ \alpha_1e_1'+\beta_1e_2']$$



$\alpha\alpha_1 [e_1', e_1'] + \alpha\beta_1 [e_1', e_2'] + \beta\alpha_1 [e_2', e_1'] + \beta\beta_1 [e_2', e_2']$

$= (\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1) [e_1', e_2']$

$\underbrace{(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)}_{\gamma} [c_1 e_1 + c_2 e_2, c_1 e_1 - c_2 e_2]$

$= \gamma [c_1^2 [e_1, e_1] - c_1 c_2 [e_1, e_2] + c_2 c_1 [e_2, e_1] - c_2^2 [e_2, e_2]]$

$= \underbrace{-2\gamma c_1 c_2}_{\delta \in F} [e_1, e_2]$

$= \delta \underbrace{[e_1, e_2]}_{\in A} = \delta e$

ومنه نبين أن

$DA = \{\theta [e_1, e_2] ; \theta \in F\}$

أي أن DA جزئية في A مولدة بعنصر واحد لأن $DA \neq 0$.

ليكن $z_0 \in D^2A = [DA, DA]$

حيث $z_0 = [x_0, y_0]$; $\forall x_0, y_0 \in DA$

$x_0 = \alpha_0 e$
$y_0 = \beta_0 e$ } $\forall \alpha_0, \beta_0 \in F$

$z_0 = [x_0, y_0] = [\alpha_0 e, \beta_0 e] = \alpha_0 \beta_0 [e, e] = 0$

ومنه $D^2A = 0$ أي أن A قابل للحل

مبرهنة:

كل جبر لي A فوق حقل F ثلاثي البعد قاعدته $\{e_1, e_2, e_3\}$ تحقق

$[e_1, e_2] = a e_1$
$[e_1, e_3] = b e_1$
$[e_2, e_3] = c e_1 - f b e_2 + f a e_3$

حيث $a, b, c, f \in F \setminus \{0\}$ يكون قابل للحل

البرهان:

ليكن $z \in DA = [A, A]$; $z = [x, y]$ مع $x, y \in A$

$x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$

$y = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 e_3$

$Z = [x, y] = [\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 , \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 e_3]$

$= \alpha\alpha_1 [e_1, e_1] + \alpha\beta_1 [e_1, e_2] + \alpha\gamma_1 [e_1, e_3]$

$+ \beta\alpha_1 [e_2, e_1] + \beta_1\beta [e_2, e_2] + \beta\gamma_1 [e_2, e_3] + \gamma\alpha_1 [e_3, e_1]$

$+ \gamma\beta_1 [e_3, e_2] + \gamma\gamma_1 [e_3, e_3]$

$= (\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1) [e_1, e_2] + (\alpha\gamma_1 - \gamma\alpha_1) [e_1, e_3] + (\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1) [e_2, e_3]$

$= (\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1) a e_1 + (\alpha\gamma_1 - \gamma\alpha_1) b e_1 + (\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1)(c e_1 - f b e_2 + f a e_3)$

$= \underbrace{\left((\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1) a + (\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1) c \right)}_{\lambda} e_1$

$+ \left((\alpha\gamma_1 - \gamma\alpha_1) b \right) e_1 - \underbrace{(\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1) f}_{\delta} b \, e_2$

$+ \underbrace{(\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1) f}_{\delta} a e_3$

$\Rightarrow Z = \lambda e_1 - \delta b e_2 + \delta a e_3$

$= \lambda e_1 - \delta(\underbrace{a e_3 - b e_2}_{e_0}) = \lambda e_1 - \delta e_0$

بما أن $\{e_1, e_0\}$ قاعدة مولدة لـ DA فإن $Z \in D^2A = [DA, DA]$

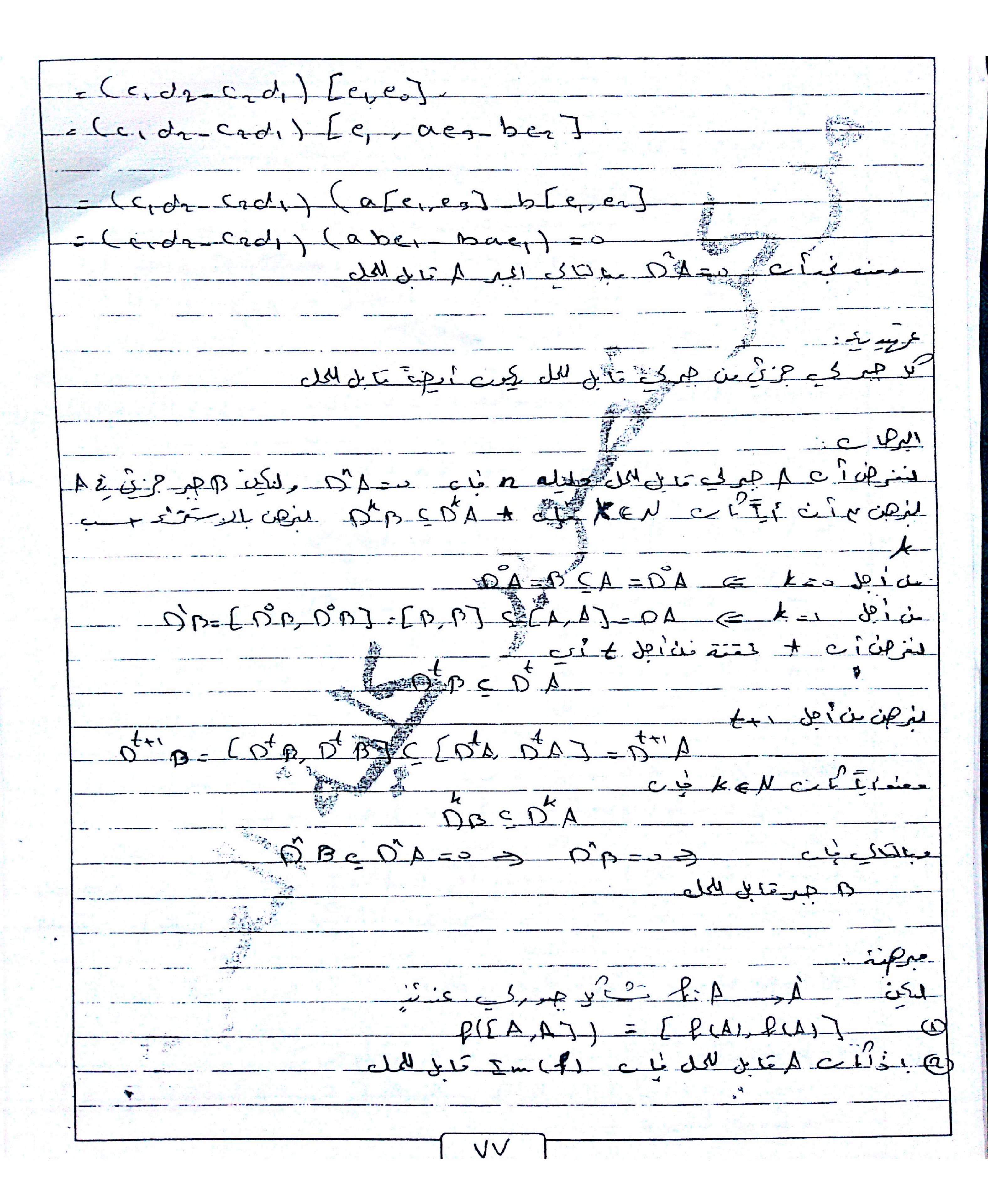
يوجد $Z_0 = [x_0, y_0]$ حيث $x_0, y_0 \in DA$

$x_0 = c_1 e_1 + c_2 e_0 \quad , \quad y_0 = d_1 e_1 + d_2 e_2 \qquad c_1, c_2, d_1, d_2 \in F$

$Z_0 = [x_0, y_0] = [c_1 e_1 + c_2 e_0 , d_1 e_1 + d_2 e_0]$

$= c_1 d_1 [e_1, e_1] + c_1 d_2 [e_1, e_0] + c_2 d_1 [e_0, e_1]$

$+ c_2 d_2 [e_0, e_0]$



$= (c_1 d_2 - c_2 d_1)\,[e_1, e_3]$

$= (c_1 d_2 - c_2 d_1)\,[e_1, a e_3 - b e_2]$

$= (c_1 d_2 - c_2 d_1)\,(a[e_1, e_3] - b[e_1, e_2])$

$= (c_1 d_2 - c_2 d_1)\,(a b e_1 - b a e_1) = 0$

ومنه نجد أن $D^2A = 0$ وبالتالي الجبر A قابل للحل

مبرهنة:

كل جبر لي جزئي من جبر لي قابل للحل يكون أيضاً قابل للحل

البرهان:

نفرض أن A جبر لي قابل للحل طوله n فإن $D^nA = 0$، ولنكن B جبر جزئي في A

لنبرهن من أن أياً كان $k \in N$ فإن $D^kB \subseteq D^kA$ * لنبرهن بالاستقراء حسب k

من أجل $k = 0$ ⇐ $D^0A = B \subseteq A = D^0A$

من أجل $k = 1$ ⇐ $D^1B = [D^0B, D^0B] = [B, B] \subseteq [A, A] = DA$

لنفرض أن * محققة من أجل t أي

$D^tB \subseteq D^tA$

لنبرهن من أجل $t+1$

$D^{t+1}B = [D^tB, D^tB] \subseteq [D^tA, D^tA] = D^{t+1}A$

ومنه أياً كان $k \in N$ فإن

$D^kB \subseteq D^kA$

وبالتالي فإن $D^nB \subseteq D^nA = 0 \Rightarrow D^nB = 0 \Rightarrow$

B جبر قابل للحل

ملاحظة:

لتكن $f: A \to A'$ تشاكل جبري لي عندئذٍ

① $f([A, A]) = [f(A), f(A)]$

② إذا كان A قابل للحل فإن $Im(f)$ قابل للحل

البرهان :

① ليكن $x \in f([A,A])$ عندئذٍ $x = f(y)$ حيث $y \in [A,A]$ وبالتالي
$y = [a,b]$ حيث $a,b \in A$ ومنه

$$x = f(y) = f([a,b]) = [f(a), f(b)] \in [f(A), f(A)]$$

ومنه

$$f([A,A]) \subseteq [f(A), f(A)]$$

ليكن $z \in [f(A), f(A)]$

$\Rightarrow z = [x_1, y_1] \;;\; x_1, y_1 \in f(A)$

$x_1 = f(a_1)$

$y_1 = f(b_1) \;;\; a_1, b_1 \in A$

$\Rightarrow z = [x_1, y_1] = [f(a_1), f(b_1)] = f[a_1, b_1] \in f(A)$

ومن الاحتواءين نستنتج المساواة

$$f([A,A]) = [f(A), f(A)]$$

② لنفرض أن A قابل للحل دليله n عندئذٍ $D^n A = 0$ لنبرهن أنه أياً كان $m \in N'$ فإن

$D^m(f(A)) = f(D^m A)$ *

بالاستقراء حسب m

$m = 0 \Rightarrow D^0(f(A)) = f(A) = f(D^0 A)$

$m = 1 \quad D(f(A)) = [f(A), f(A)] = f([A,A])$
$= f(DA)$

لنفرض أن العلاقة * صحيحة لأجل k أي

$D^k(f(A)) = f(D^k A)$

$D^{k+1}(f(A)) = [D^k(f(A)), D^k(f(A))] = [f(D^k A), f(D^k A)]$

$= f([D^k A ; D^k A]) = f(D^{k+1} A)$

وبالتالي العلاقة * صحيحة لأجل كل $m \in N$ وبالتالي لأجل n فإن

$D^n(f(A)) = f(D^nA) = f(0) = 0$

ومنه يكون $I(a+f) = f(a)$ قابل للحل

تمهيدية

ليكن A عنصراً من جبر لي R ، $n \in N$ عندئذٍ

① $D(D^nA) = D^{n+1}A$

② إذا كان $m \in N$ فإن

$D^m(D^nA) = D^{n+m}A$

البرهان

بالاستقراء حسب n

$n=0 \Rightarrow D(D^0A) = D(A) = D^{0+1}(A)$

$n=1 \Rightarrow D(DA) = [DA, DA] = D^2A = D^{1+1}A$

نفرض أنها صحيحة لأجل k $\quad D(D^kA) = D^{k+1}$

نثبت لأجل k+1 فإن

$D(D^{k+1}A) = [D^{k+1}A, D^{k+1}A]$

$= D^{k+2}A = D^{k+1+1}A$

② بالاستقراء حسب m

$m=0 \Rightarrow D^0(D^nA) = D^nA = D^{n+0}A$

$m=1 \Rightarrow D(DA) = D^{n+1}A$

نفرض أن العلاقة صحيحة لأجل k

$D^k(D^nA) = D^{n+k}A$

ونبرهن صحتها من أجل k+1

$D^{k+1}(D^nA) = [D^k(D^nA), D^k(DA)] = [D^{n+k}A, D^{n+k}A]$

$= D^{n+k+1}A$

مبرهنة:

لتكن A جبر لي فوق الحقل R و I مثالية في A الشروط الآتية متكافئة:

① A قابل للحل

② كل من I و A/I قابل للحل.

البرهان:

$1 \Leftarrow 2$ لنفرض أن A قابل للحل بما أن I جبر جزئي في A فإن I قابل للحل

من جهة أخرى لنأخذ التشاكل القانوني الطبيعي

$$\pi : A \longrightarrow A/I$$

وبما أن $Im(\pi)$ قابل للحل حسب ... فإن A/I قابل للحل

$2 \Leftarrow 1$ لنفرض أن كل من I و A/I قابل للحل عندئذ توجد أعداد صحيحة موجبة m, n تحقق $D^n I = 0$, $D^m(A/I) = I$

نفرض أن $\pi : A \longrightarrow A/I$ هو التشاكل القانوني الطبيعي فإن

$$\pi(D^m A) = D^m(\pi(A)) = D^m(A+I) = I$$

نبرهن أنه في $t \in N$ فإن

$$D^t(A+I) = (D^t A) + I \quad *$$

$t=0 \Rightarrow D^0(A+I) = A+I = (D^0 A)+I$

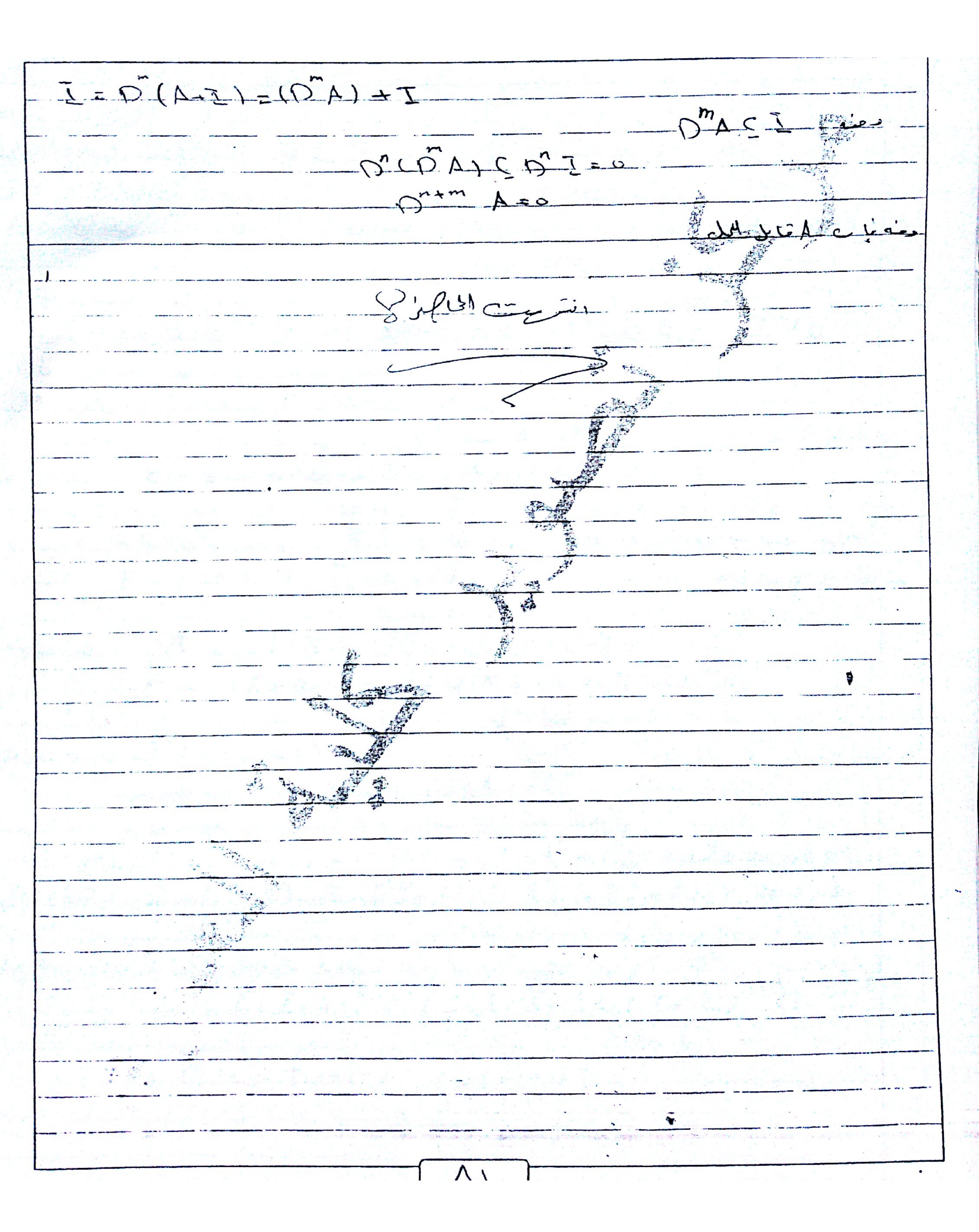
$t=1 \Rightarrow D(A+I) = [A+I, A+I] = [A,A]+I = (DA)+I$

لنفرض أن العلاقة $*$ صحيحة لأجل $k \in N$

$$D^{k+1}(A+I) = [D^k(A+I), D^k(A+I)]$$

$$= [(D^k A)+I, (D^k A)+I] = (D^{k+1} A)+I$$

ومنه العلاقة $*$ صحيحة لأجل كل k



$I = D^{m}(A+I) = (D^{m}A) + I$

ومنه $D^{m}A \subseteq I$

$D^{n}(D^{m}A) \subseteq D^{n}I = 0$

$D^{n+m}A = 0$

ومنه أن A قابل للحل

انتهت المحاضرة